Notes sur l'utilisation des classes d'équivalence en théorie des groupes

Pierre-Emmanuel Petit, IMN, Nantes

Le but de ce document est de vous permettre de clarifier des notions dont la compréhension peut être difficile en français (mais pas en anglais), tout simplement parce-que les mathématiciens français adorent les classes d'équivalence et ont utilisé ce terme abondamment, mais pour désigner des classes de type différent (et qui, justement, ne sont pas équivalentes…). Les Anglais ont été plus sages. La difficulté est purement linguistique, et j'espère que ce document permettra de clarifier de point. En même temps, je donnerai la traduction des termes anglais, qui n'est pas toujours évidente. Des définitions parfois mieux écrites (avec les symboles mathématiques) se trouvent dans le lexique : n'hésitez pas à vous y référer et à y réviser les notions de base. Commençons par cette notion de classe d'équivalence.

0) Relation d'équivalence – Classe d'équivalence – Partition

Equivalent relation **=** relation d'équivalence

Equivalent class **=** classe d'équivalence

Partition of a set **=** partition d'un ensemble

Reflexive, symmetric, transitive -> obvious translation

Définition : Une *relation d'équivalence* sur un ensemble E est une relation binaire ~ sur E qui est à la fois *réflexive*, *symétrique* et *transitive*.

- *Réflexive* **:** pour tout élément x de E, on a x ~ x
- *Symmétrique* **:** si deux éléments x et y de E vérifient x ~ y, ils vérifient aussi y ~ x
- *Transitive* **:** si trois éléments x, y et z de E vérifient x ~ y et y ~ z, alors x ~ z

Définition : La *classe d'équivalence* [x] d'un élément x de E est l'ensemble des éléments y de E tels que x ~ y

Définition : L'ensemble des *classes d'équivalence* forme une *partition* de E.

A noter qu'une partition de E suffit à définir des classes d'équivalences de E, sans qu'il y ait besoin d'expliciter la relation d'équivalence. Autrement dit, du moment que vos chaussettes sont rangées dans des tiroirs bien identifiés (et que vous êtes capables de les retrouver), pas besoin de donner la relation mathématique qui permet de les retrouver. Par la suite, j'expliciterai éventuellement ces relations d'équivalence, mais ce n'est pas un point essentiel.

Parmi les nombreux exemples de relation d'équivalence, la congruence est un exemple intéressant.

Commençons par l'ensemble (**Z**,+) des entiers relatifs muni de l'addition. Il a une structure de groupe (infini). On peut le diviser en deux classes d'équivalence : les nombres pairs (classe **[0]**) et les nombres impairs (classe **[1]**), qui forment une partition de E. L'addition de deux nombres pairs (ou de deux nombres impairs) donne un nombre pair, et l'addition d'un nombre impair et d'un nombre pair donne un nombre impair, ce qui s'écrit de la façon suivante :

[0] + [0] = [0]

[1] + [1] = [0]

[1] + [0] = [0] + [1] = [1]

L'ensemble ({**[0]**,**[1]**},+) muni de l'addition est un groupe abélien d'ordre 2 (et cyclique), que l'on notera $\mathbf{C_2}$. Nous voyons que la notion de classe d'équivalence est fructueuse en théorie des groupes. A noter que je n'ai toujours pas explicité la relation d'équivalence : j'ai juste partitionné mon ensemble en deux classes, [0] et [1].

Généralisons cette notion à un ensemble de n éléments formé des n classes d'équivalences de Z {[0], [1], …., [n-1]}, qui forment une partition de Z, la relation d'équivalence étant la relation de congruence modulo n :

a est congru à b modulo n (on note $\mathbf{a \equiv b \pmod n}$) si et seulement si (ssi) n divise b-a

L'ensemble ({[0],[1], …., [n-1],+) muni de l'addition forme un groupe cyclique (donc abélien) d'ordre n, que l'on note $\mathbf{C_n}$. Les mathématiciens, qui adorent les notations compliquées, l'appellent aussi **Z**/n**Z**, car cela correspond à la fois à une notation utilisée en arithmétique et en théorie des groupe (nous expliciterons ci-dessous que cela correspond à un groupe quotient). Notez aussi que la notation $\mathbf{C_n}$, qui correspond à celle du groupe abstrait, est aussi celle de Schönflies pour les groupes cycliques. Ce n'est pas le cas général. Pour plus d'explications (et des tableaux synthétiques bienvenus) :

https://en.wikipedia.org/wiki/Crystallographic_point_group

Nous avons ici fait intervenir ici le mot *classe* (d'équivalence) en théorie des groupes, mais je vais expliciter ci-dessous deux autres exemples de l'emploi de ce mot.

1) Classe suivant un sous-groupe

Coset **=** classe suivant un sous-groupe (notez la concision de l'anglais...)

Right coset **=** classe à droite

Left coset **=** classe à gauche

Définition : Soit H un sous-groupe du groupe G, et g un élément de G. On appelle *classe à gauche* (à *droite*) suivant H l'ensemble gH (Hg) constitué par tous les éléments gh (hg), pour tout h de H.

Reprenons notre exemple de groupe $\mathbf{C_2}$ = **Z**/2**Z**

(**Z**,+) est un groupe abélien infini. L'ensemble des nombres pairs 2**Z** (= [0]), muni de l'addition, forme lui aussi un groupe abélien infini. C'est un sous-groupe de **Z**. On peut alors écrire la décomposition en classe à gauche :

Z = [0] ∪ [1] = 0+2**Z** ∪ 1+2Z

Les classes à gauche sont donc [0] et [1]

Et celle à droite :

Z = [0] ∪ [1] = 2**Z**+0 ∪ 2**Z**+1

Les classes à droite sont donc [0] et [1]. A noter que la décomposition en classes à gauche et à droite est ici identique, ce qui est vrai pour deux raisons (chacune étant suffisante), parce-que **Z** est un groupe commutatif, et parce-que **Z** se décompose en deux classes suivant 2**Z** (2**Z** est donc un sous-groupe d'indice deux de **Z**). Lorsque les décompositions à droite et à gauche sont identiques, on dit que le sous-groupe est normal, ce qui peut se définir de deux façons équivalentes.

2) Sous-groupe normal

***Normal subgroup* = *invariant subgroup* =** sous-groupe normal = sous-groupe distingué = sous-groupe invariant

Définition 1 : H est normal dans G ssi les classes à droite et à gauche dans G coïncident, c'est-à-dire que, pour tout g de G, gH = Hg

Définition 2 (équivalente) : Soit H un sous-groupe d'un groupe G. H est normal dans G s'est est stable par conjugaison, c'est-à-dire si, pour tout h de H et tout g de G, gHg^{-1} est inclus ou égal à H

La définition 2 découle de la définition 1 car, si gH=Hg, en multipliant à droite par g^{-1}, on obtient $H = gHg^{-1}$. La réciproque nécessite de montrer que le relation d'inclusion est en fait une relation d'égalité.

Dans notre exemple, en prenant l'une ou l'autre des définitions, nous montrons que 2**Z** est un sous-groupe normal de **Z**.

3) Groupe quotient

***Quotient group* =** groupe quotient

Définition : Soient G un groupe et H un sous-groupe normal de G d'indice fini. L'ensemble des classes d'éléments de G suivant H est désigné par G/H Le groupe obtenu en munissant G/H de la loi de composition X ⋆ Y, loi qu'on peut caractériser par x H ⋆ y H = (x y) *H, est appelé le groupe quotient de G par H.

Autrement dit, les éléments du sous-groupe sont les classes, et, en munissant cet ensemble d'une opération, on forme ainsi le groupe quotient. A noter qu'il y a souvent une confusion entre la notation de l'ensemble des classes G/H et celle du groupe (G/H,*), la loi de composition * étant implicite : cette absence de distinction ne pose pas vraiment de problème et allège la notation. En revanche, certains auteurs notent les classes à droite G/H et celles à gauche G\H (ou le contraire…) : cette notation, source de confusion, est à proscrire, et la notation G/H doit être réservée à l'ensemble des classes d'un sous-groupe normal.

Dans notre exemple, 2**Z** est un sous-groupe normal de **Z**, et l'ensemble des classes **Z**/2**Z** = {**[0]**, **[1]**} munie de l'opération d'addition forme un groupe $\mathbf{C_2}$, comme nous l'avons vu précédemment. D'où la notation $\mathbf{C_2}$ = **Z**/2**Z**, et plus généralement $\mathbf{C_n}$=**Z**/n**Z,** notation qui se trouve être convergente avec celle de l'arithmétique.

4) Classes de conjugaison

***Conjugaison class* =** classe de conjugaison

Définition : Soient g et h des éléments d'un groupe G. g et h sont des éléments conjugués s'il existe un élément f de G tel que $g = f^{-1}hf$. L'ensemble des éléments conjugués à g forment une classe de conjugaison.

G étant un groupe, on remarquera que la définition alternative avec $k = f^{-1}$ est tout aussi valable. Dans la définition ci-dessus, $g=f^{-1}hf$ devient alors $g=khk^{-1}$.

Dans l'exemple de $\mathbf{C_2}$, nous avons deux classes de conjugaison, **[0]** et **[1]**.

L'ironie est, que dans l'exemple développé ici, les classes sont les mêmes, quelque-soit la définition (classes de congruence, classes suivant un sous-groupe, classes de conjugaison). C'est vrai pour les groupes cycliques d'ordre n, mais ce n'est pas le cas général, et les classes suivant un sous-groupe et les classes de conjugaison ne sont pas les mêmes.

On peut aussi facilement montrer que tout groupe commutatif d'ordre n, donc tout groupe cyclique $\mathbf{C_n}$, est formé de n classes de conjugaison, chacune formée d'un seul élément. Ce n'est évidemment pas le cas général, sinon cette notion n'aurait aucun intérêt. La notion de classes de conjugaison joue un grand rôle dans l'établissement des tables de caractère.